# 数学科

杉本　泰範　　岩本　和馬

数学科

## Ⅰ　はじめに

OECD Education2030プロジェクトが提唱する「ラーニングコンパス」は、「生徒が、単に決まり切った指導を受けたり、教師から方向性を指示されるだけでなく、未知の状況においても自分たちの進むべき方向を見つけ、自分たちを舵取りしていくための学習の必要性を強調する」ことが意図された（白井、2020）ものである。そしてこの「ラーニングコンパス」において、必要なスキルの一つとして、批判的思考力と創造性が挙げられている。より複雑で予測困難な時代にあって、学習者は一定の課題解決に止まらず、これまで以上に主体的に学習に向かい、自ら学習を構築する経験が必要になると考える。

数学における知識（性質や法則など）は本来、この批判と創造が織りなすことで絶えることなく築かれるものであると捉えることができる。中原（1995）によれば、数学における知識は、それらが確立されると、その性質や法則を変えずにその適用範囲をできるだけ広げようとする試みが行われる。そして試行錯誤の際、数学的抽象や数学的一般化の過程における試行的な抽象・一般化を繰り返しながら、その知識の内包、外延の洗練化、確定化が行われる。こうした数学そのものがもつ学問としての性質から、数学はしばしば、高度に抽象化された系統性の強い学問であるといわれる。

他方、その学問性ゆえ、生徒はともすると単純な技能の習熟や目の前の問題の解決で満足してしまいがちである。数学における知識が築かれる背景にあるものや、課題の解決後にさらに見いだされる課題に対する意識が低い傾向にあることは、全国学力・学習状況調査の結果からも捉えられる。こうした状況の解決には、生徒がこれまで以上に既習の知識や過去に課題解決した際の方略との関係性を意識的に捉えながら思考し、他者との関わりの中で自らの思考をさらに洗練させることで、数学における知識を築いていくことが必要になってくる。これを、今次研究における数学科で目指す「『自他』を往還し、批判的・創造的に学ぶ生徒」の姿と捉えることとする。

現在の生徒は、将来にわたってより一層複雑で予測困難と言われる社会に向き合っていく。そのような生徒にとって、知識は過去の知識が織りなして更新されるものであり、その更新に自らが関わっていけると実感する経験は、未来社会を主体的に切り拓き、自他にとってよりよい生き方を探っていく上でも重要ではないだろうか。厳然たる学問体系である数学科だからこそ、その学問の内容に批判的に向き合い、自ら知識を創造し続けようとする態度を養うことを目指したい。

## Ⅱ　数学科における研究目標２の実現に向けた取組

| |
|---|
| **研究目標２**：各教科・領域において、既習と未習、自己と他者の考えを意識的につなぎ合わせながら解決へ向かう授業のあり方を考え、実践する。 |

### 1　「原問題」の提示と「What-If-Not」方略を用いた「新問題」

中学校学習指導要領（平成29年告示）解説（数学編）では、「問題発見・解決の基礎をなす技能を身に付けることにより、原初となる具体的な数学の問題から、条件を変えたり、条件を弛めたりするなど

して新たに設定した問題へと統合的・発展的に考察することができるようになる。」とある。しかし一般的に数学科の授業では、1時間（50分間）の中で一つの問題を取り上げ、様々な考え方を共有しながらよりよい課題解決に向かう形態が多い。この授業形態が、子ども自身が原初となる問題など、既習事項とのつながりから新たな知識が創り上げられる実感をもちづらい原因になるのではないかと考える。これに対して黒﨑（2019）は、変動の激しい時代に相応しい数学の問題として提言されるCUN（Complex,Unfamiliar and Non-routine）問題は、教科書などの一般的な問題である「伝統的課題」と一つの連続帯に位置付けられると捉える立場から、より統合的・発展的に一歩進んだ数量や図形の課題を見いださせるための方法の一つとして「What-If-Not」方略（Brown & Walter、1983）を挙げている。そこで、授業の導入部などで「原問題」を提示し、「What-If-Not」方略を利用して「新問題」を生み出す取組を考えた。

「原問題」は、いわゆる習得的な内容と活用的な内容とで、やや提示の仕方が異なる。後者については実践例1で詳述する。前者については前年度などの既習問題、活用的な学習内容については本時や前時で一度解決した問題などが考えられる。習得的な学習内容の一例として、例えば右の内容が考えられる。第1学年で学習した「同じ文字の1次式はまとめてよい」という計算のきまりを、「同類項ではない項は一つにまとめられない」という計算のきまりに更新する内容である。文字が1種類の1次式である「原問題」に対して「もし文字が1種類の1次式ではなく、複数の種類の文字式にしたらどのように式を変えられるだろう。」と教師が問いかける。すると生徒は、新問題として上のような例の式を想像する。生徒が想像した式を取り上げて共有することで、生徒は本時のねらいを自分事としてより焦点化しながら捉える。そして第1学年で学習した既習の計算のきまりとその方法を導いた方略を批判的に振り返り、意識的につなぎ合わせて計算のきまりを更新していく。さらに、「新問題」の例そのものを生徒自身が考えることで、「$x^2$と$x$は同類項と捉えてよいのだろうか。」という疑問が生徒から創出される。このように「原問題」に「What-If-Not」方略を利用した問いかけを行うことで、生徒は既習の内容を自他との関わりの中から批判的に捉え、数学的な見方・考え方を的確に働かせながら創造的に解決に向かう。そして、将来にわたって自ら見いだした課題に対して「What-If-Not」と問いかけながら自己の学びを調整し、新たな価値を生み出す姿につながると考えた。

第2学年　第1章「式の計算」（3／10時間目）

【一般的な問題の例】$3x+4y-2x-6y$　を計算すると、どのような結果になるでしょう。

【原問題】$(3x+4)-(2x-6)$

【「What-If-Not」方略を利用した問いかけ】

文字が1種類の1次式ではなく、複数の種類の文字式にしたらどのような式になるだろう。

【新問題の例】

$(3x+4y)-(2x-6y)$　　$(3x^2+4y)-(2x-6)$

## 2　方略シートを用いた形成的アセスメント機能の活用

ルーブリック評価は、「知識・技能」「思考・判断・表現」「主体的に学習に取り組む態度」をパフォーマンス課題で一体化して評価する採点指針として用いられる。しかしともすると、生徒がルーブリック表の具体的な記載から解決の方向性を察してしまい、真の意味での課題解決に向かうことにつながらない恐れがあると考える。そこで、ルーブリック表の構成を参考としながらも、その表現を抽象的にし、授業において生徒が表を活用して課題解決の方向性を自己決定し、生徒と教師、生徒と生徒の関わりの中から自らの学びを調整するための形成的アセスメントの機能を有する方略シートの在り方を考えた。

生徒は目の前の課題に対して、方略シートを参考に目指すべき解決の方向性を自己決定して取り組む。一定の時間が経過した後、教師の指示によって現段階での自身の解決状況を生徒が自己評価し、「完全

に解決した、あるいはほぼ解決の見通しがたった。」という場合は「○」を、「まだ自信がない。」という場合は「△」を方略シートの該当する枠内につける。同時に、教師も各生徒の状況を見取り、教師の評価を枠内に記入するフィードバックを行う。この教師による評価は、授業後に教師がワークシートを回収してシートに記載したり、ICTを利用して即時的に行ったりするなどの方法が考えられる。

その後、生徒はそれまでの自分なりの解決方法を基に、この方略シートを活用しながらよりよい解決を目指す。まず、自己評価と教師による評価が異なった場合はその理由を考え、方略シートの枠に当てはまる解決方法を再考する。そして、他の枠内に当てはまる解決を目指す場合は、既に解決した方法を振り返って、明確な目的意識に基づいて修正を加え、解決方法を探る。また、他者に意見を求める場合も、自己評価や教師による評価の記述があることで、目的を明確にした意見交流や援助要請につながる。なお、最も高次な解決方法で終えた生徒は、その「新問題」を「原問題」と見なし、自ら「What-If-Not」方略を用いて新たな「新問題」を見いだし、既に解決した内容を振り返りながら解決を目指す活用も考えられる。このように方略シートを用いることで、一授業の中で既に解決した内容と新たに見いだした課題、自己の解決内容と他者の解決内容をそれぞれ批判的に捉え、つなぎ合わせながら、統合的・発展的に解決に向かうことになる。そして、一つの課題に対する解決方法を目的に応じて複数の角度から吟味し、絶えることなく新たな価値を創造しようとする姿につながると考えた。



## 3　注目ポイントから着想を広げ、つなぎ合わせる授業展開

樋口（2013）は、批判的思考技能の転移を促す方法として次の二つに言及している。

- どの情報が最も重要であるかについて、理由とともに考えさせ、情報を組織する図表化や個々の情報をグループ化およびラベル化することを通して、構造を明確にすること。
- 複数の案を考えさせることで根底にある構造を明らかにすること。

これは、個々の情報同士のつながりを意識的に結び付けることや他者との関わりを通してそれぞれの結び付きの違いから本質を明らかにすることで、より批判的に考えるようになることを示している。

特に抽象的な思考を要する数学では、生徒一人一人が問題や学習課題に対して注目する箇所は異なり、注目した箇所から生まれる方法や考えも様々である。教師が生徒の発想を大切にし、生徒が個々の教えをつなぎ合わせて吟味できるような取組が重要である。そのような授業を展開していくことで、生徒は批判的に振り返り、方略を洗練していくことにつながると考える。

そこで、授業展開において以下の効果を期待し、六つの働きかけを行った。

| 流れ | 教師の働きかけ | 期待する生徒の姿 |
|---|---|---|
| 個人思考 | ①WSの様子から問題や課題における生徒の注目ポイントを捉え、価値付けする机間指導を行う。 | ・自分の考えを自覚する。 |
| 中間交流 | ②それぞれの注目ポイントを板書し、全体に共有する。 | ・別の視点から解決に向けて考える。 |
| | ③それぞれの注目ポイントから想起する考えや方法（着想）について、ICT端末などを活用し、可視化する。 | ・自分の考えていることを表出する。<br>・他者の考えを知り、自分の考えと比較し、自分の考えを修正や補完する。 |
| 個人及び集団思考 | ④ICT端末上の情報について、板書を通して整理する。 | ・悩みや疑問を表出させる。 |
| | ⑤注目ポイントと着想のつながりが曖昧なものを取り上げ、なぜつながるのかを個または全体に投げかける。 | ・理由を考えることを通して、どの既習の知識が有効か自覚し、つながりを明確にする。 |
| 振り返り | ⑥解決過程で着想同士のつながりがあったものは何か問いかける。 | ・自分なりにつながりを整理する。<br>・他者とのつながりの違いから解決する上で、何が重要であったか考える。 |

この取組の「注目ポイント」とは、問題や課題に対して生徒が考えを広げるきっかけとなった箇所のことである。また「着想」とは、注目ポイントから生まれた考えや方法のことを示す。この取組の特徴は、生徒が考えていることや悩んでいること等を教師が引き出し、ICT端末や板書を活用し生徒の考えを可視化し、つながりや理由を問うフィードバックを行うことである。

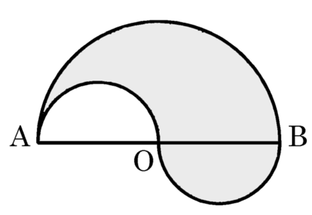
生徒の着想を可視化することで、生徒は無意識であった注目ポイントと着想のつながりや他者の着想を意識的に捉え、既習を振り返りどのように適用できるか吟味したり、他者の着想から自分の着想を見つめ直したりすることにつながる。また、着想を注目ポイントごとに整理することは、事象を数理的に捉える見方を養ったりすることにも寄与する。加えて、可視化された他者の着想に触れることや議論を焦点化することで、自分と他者の着想の違いや関連性について疑問が生まれ、他者と関わる必然性につながる。

振り返りの場では、教師は⑥の働きかけを行うことで、生徒はそれぞれの着想の結び付きを考えることを通して、よりよい解決について吟味し、自分なりの方略を自覚する。その後、他者との交流を通して、他者との着想同士の結び付きの違いに着目し、つながりが曖昧な部分を尋ねたり、他者との結び方に注目したりするなど、生徒は有機的な関わりとなる。そして、得られた方略について批判的に振り返えることを通して、方略がさらに洗練される。このような授業展開を取り組むことで、新たな価値を創造する姿につながると考える。

## Ⅲ　実践例

### 実践例１　　第２学年　第１章「式の計算」式の利用

〔問題〕　右の図において、「ABを直径とする半円Oの弧の長さは、ABを二等分した線分を直径とする半円の弧の長さの和と等しい。」は正しいといえるでしょうか。




〔本時で用いる手だて〕

１　「原問題」の提示と「What-If-Not」方略を用いた「新問題」

「二等分した線分」のところを「三等分した線分」、「四等分した線分」、･･･ と条件変更しても、同じ性質が成り立つだろうか。

２　方略シートを用いた形成的アセスメント機能の活用

| | １つの具体例を基に説明している | 複数の具体例を基に説明している | すべての場合について説明している |
|---|---|---|---|
| 長さを特定の数にして計算している | | | |
| 長さをすべての値を含めて計算している | | | |

表の縦軸は特殊化と一般化の関係を、横軸は「What-If-Not」方略を適用させた「線分を三等分した場合」、「線分が三等分や四等分など複数の場合」、「線分を$n$等分した場合」という段階を示しているが、表現はやや抽象的なものにとどめている。

#### １　題材の価値

本題材は教科書にも掲載されている一般的な問題であり、文字を用いた論証を通して、証明における文字の必要性やよさに気付くことができるものである。またそれだけでなく、この問題を「原問題」として、「What-If-Not」方略を働かせて条件変更を行った「新問題」の証明を通して統合的・発展的な

考えを働かせることで、数学の学習内容はそれで完結せず、一つの性質を複数の視点で捉え直すことで絶えず発展し続けるものであることを実感できる点においても価値が大きいと考える。



### 2　授業の実際

導入部においては、$\overset{\frown}{AB}$ と $\overset{\frown}{AO}+\overset{\frown}{BO}$ の長さを比較し、どちらが長く見えるか予想させた後、ABを10cmと仮定して計算するよう指示し、実際に長さが等しくなることを確認した。その後、「この性質は10cmだけでなく、どのような長さに変えても正しいのだろうか。」と問い、学習課題「性質が正しいかどうかをどのように説明するとよいだろうか」を共有した。個人思考の時間を終えると、小集団による交流の時間をとらず、全体の場で文字を用いて表した説明と、他の具体的な長さで計算した説明の両方について、生徒の説明を発表を通して共有した。

その後、教師が「どのような条件変更ができるだろう」と問いかけると、次のような考えが出された。

| |
|---|
| ①　二等分だけでなく、三等分、四等分、･･･としたらどうなるか。 |
| ②　点Oを中点ではなく、直径の別の位置にずらすとどうなるか。 |
| ③　弧の長さではなく、面積にするとどうなるか。 |

様々な条件変更ができることを全体で確認した後、全体では①を共通した「新問題」にすることを確認した上で方略シートを配付し、自分自身がどの枠に当てはまる説明を目指すのか自己決定した上で取り組むよう指示した。15分の個人思考の時間をとった後、その段階での自己評価を記述させ、ワークシートを回収して50分が経過した。

次の時間、教師側の評価を記述したワークシートを返却した後、自分自身の説明をさらによい説明の枠に入れるには、説明の内容をどのように修正するとよいか投げかけた。また、既に右下に「○」がついた生徒には、前時で予想した条件変更の在り方を参考に、「新問題」に条件変更をするよう投げかけた。すると生徒は、「一つの具体例で説明したけれど、複数の具体例って何をしたらよいのだろう。」「長さをすべての値について説明するってどういうことだろう。」などと、方略シートの記載内容に基づいて考え始めた。そして、「長さをすべての値について説明するには文字を使ったらよい。」ということに気付いて説明の修正を行った生徒は、「それなら三等分、四等分、･･･という例も、長さとは異なる文字を使えばよい。」という考えに至り、さらによい説明を目指した。また、新たに条件変更を行った生

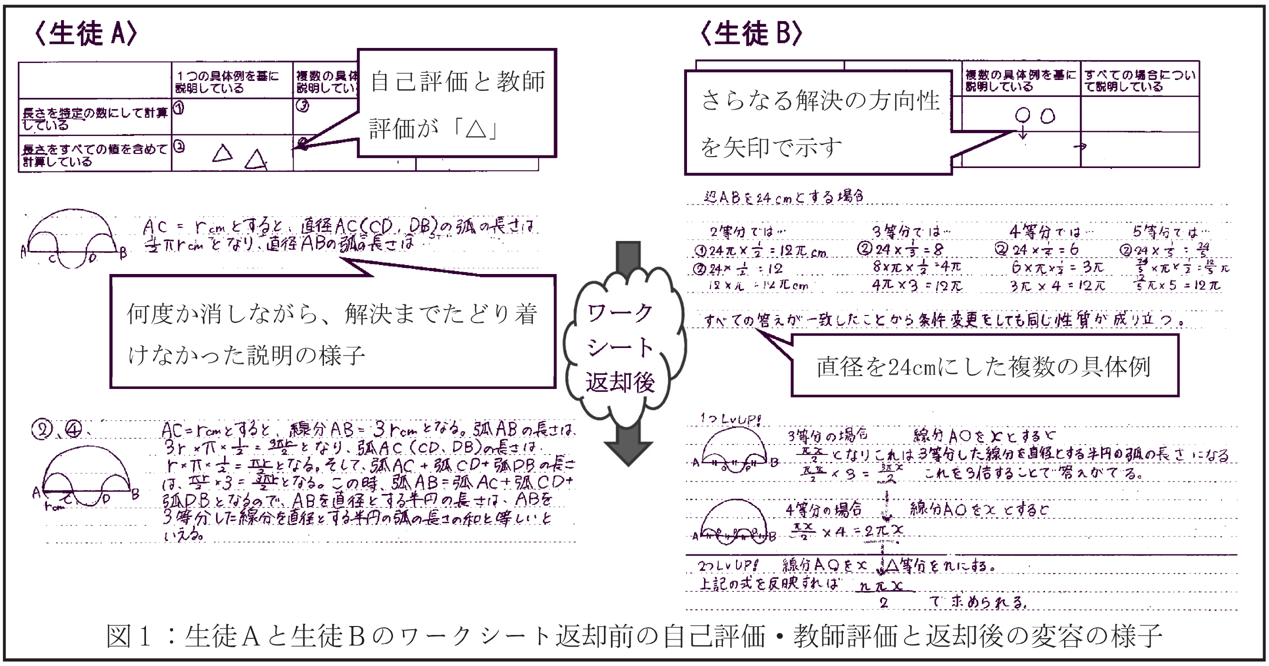



図１：生徒Ａと生徒Ｂのワークシート返却前の自己評価・教師評価と返却後の変容の様子

徒は、②の解決のために自身の説明を見直し、「二等分の場合は一つの文字で表せたが、中点でない場合は別の文字で表せばよい。」と考えて、説明を修正することで命題の証明を行った。さらに「新問題」として①と②を合わせて、「$n$等分ではなく、直径を適当な長さの$n$本に分けたらどうなるだろう。」などと、自ら発展的に考える生徒も複数見られた。図１は、生徒Ａと生徒Ｂのワークシート返却前後の変容の様子である。生徒Aは最初に文字を使って三等分した図の説明をしようとしたが、時間内に方向性を見いだせず、うまくまとめられなかった。しかし返却後、「原問題」の解決方法と照らし合わせながら改めて「新問題」に向かい、解決する姿が見られた。また生徒Ｂは、最初は具体的な数字をおいて複数の図について説明した。しかし返却後、さらに高次の説明をするには文字におく必要があることに気付き、一段階だけではなく、さらに二段階向上した説明をまとめるに至った。

本実践では、教科書で一般的に扱われる問題を「原問題」として「新問題」を設定し、生徒は方略シートを活用しながら解決方法を自己決定し、自他との関わりの中から解決に向う試みを行った。これによって生徒は、明確な判断基準に基づいて自分なりに解決した内容や他者の考えを批判的に捉えて必要な考えを見いだし、それらをつなぎ合わせながら、より高次の解決に向かったと考える。

## 実践例２　　第２学年　第１章「式の計算」式の利用

〔問題〕　$3^{20}$と10000000000どちらが大きいか。

〔本時で用いる手だて〕
３　注目ポイントから着想を広げ、つなぎ合わせる授業展開

### １　題材の価値

数の大小の比較について、これまでの学習で様々な方法を学んでいる。例えば、分数や小数の数の比較ではどちらかの形に変形し揃えたり、分母の違う分数では通分によって分母を揃えたりすることで、大小関係を明らかにできる。これらの共通点として「揃える」ことが重要である。「累乗の指数」で表された数においても、累乗の指数が表す意味を適切に捉えることで、それらが自在に変形できることから、指数を揃えることで比較が可能となる。このような実感を通して、数を比較するための方略を洗練できる題材である。

### ２　授業の実際

問題提示後、問題に対する感想を全体で共有した。すると、「$3^{20}$の計算が大変そう。」「計算しないで解けるかも。」といった意見が挙がったので、計算結果を求めない比較方法に注目するよう「累乗の指数で表された数の大小はどのように比較するとよいだろうか」と学習課題を共有した。

その後、３分程度の個人思考の場を設けた。その際、教師は生徒のワークシートの様子から「$3^{20}$を変形しようとしているんだね。」「100億から考えを進めているんだね。」などと、生徒の注目ポイントを捉えながら机間指導を行った（P33Ⅱ３－①以降【個人思考①】）。そして３分後、課題解決に向けてどこに注目して考えているか全体に投げかけると、「$3^{20}$」「100億」「比較の方法」といった

図２：$3^{20}$を注目ポイントとした付箋アプリ上の着想の様子

注目ポイントが挙げられた【中間交流②】。そこで、これらの注目ポイントから思いつく着想についてそれぞれ考え、思いついた着想を付箋機能アプリケーション（付箋アプリ）に入力するよう指示を出した【中間交流③】。すると、図２のような着想が打ち込まれた。

図３：その他付箋アプリ上に表出された生徒の着想

生徒は膨大な他者の着想の情報を得ることで「自分の着想が他の人と違う。」「$3^{20}$を分解するってどうやるのか。」「なぜ$81^5$になるのか。」など、自然と自分の着想を振り返ったり、他者の着想に疑問を抱いたりしながらつぶやく生徒が現れた。そこで一度個人思考を中断して、教師はそれぞれの疑問について取り上げながら、板書で注目ポイントと着想を整理し、それらのつながりの中で生徒が疑問に思う関係について可視化した【個人及び集団思考④】。特に、「$3^{20}=9^{10}$」「$3^{20}=81^5$」については、図４のように教師からも全体に変形できる理由は何か投げかけながら板書し、再び自力解決の時間を与えた【個人及び集団思考⑤】。すると、生徒は板書や付箋アプリ上の着想を手掛かりにどのように説明したらよいか試行錯誤を始めた。その中で、$3^{20}$の意味について捉え直し、３を20回かけ合わせ、乗法の結合法則を利用し、９のペアが10個できることや81のペアが５個できることに気付き始めた。これは、既習である「累乗の意味」について考えることで、未習である「累乗の指数の式変形」とつながった瞬間であると考える。

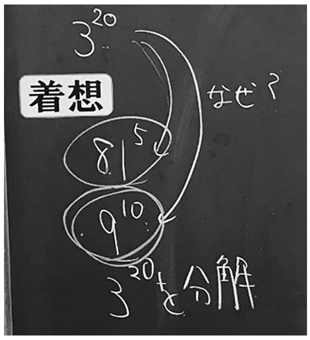


図４：着目ポイントと着想のつながりを整理し、疑問を板書する様子

授業の後半、問題が解けた生徒が数名表れ始めたところで、教師はそれぞれの着想同士のつながりや、課題解決において重要なことは何だったのかを整理するよう全体に問いかけ、自由に交流できる時間を与えた【振り返り⑥】。交流の始めは、「$9^{10}$」と「$10^{10}$」を結び付け、「この二つだと比較できる。」という意見が挙がった。その後、「『$81^5$』と『$100^5$』でも比較できる。」といった意見も挙がったことで、二つの考え方から指数を揃えて比較することが重要であることを、交流を通して見いだす姿が見られた。

授業の終末の全体共有の場では、比較の方法について、「今回は指数を揃える方法が有効であったが、累乗の指数が違ったら同じように比較できない場合もあるのではないか。」とすべての場合に適用できるわけではないことについても議論を通して確認された。

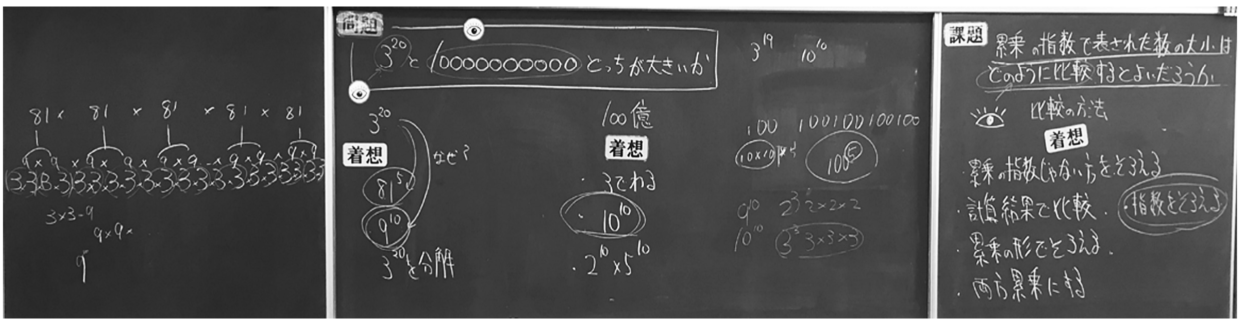


図５：本時の最終板書

本実践において、注目ポイントから着想を広げ、つなげる授業展開を行うことで、自他の考えを意識的につなぎ合わせ他者と自分の考えを様々な角度から吟味したり、自分の考えと関連付けながら他者に関わったりする姿が生まれた。また、可視化された考えに対して教師が適切なフィードバックを行うことで、生徒は注目ポイントと着想のつながりを自覚的に捉え、既習と未習を意識的につなぎ合わせる姿

につながった。このような授業展開を行うことで、数の大小関係の比較について、改めて条件の一部を揃えることの重要性について実感し、方略の更新に寄与したと考える。

## Ⅳ　授業実践を通して見えてきたこと

今次研究１年次では、特に既習と未習のつながりにおける「既習」を「既習の知識や過去に課題解決した内容、あるいは解決に用いた方略」と捉え、「未習」との関係性を意識的に捉えながら思考し、他者との関わりの中で自らの思考をさらに洗練させることで、数学における知識を築く姿を目指し、実践を行った。新研究における実践を始めた当初、単に与えられた問題を解決するだけでなく、新たな問題に発展させたり、自他の考えを意識的につなぎ合わせたりすることに対して戸惑いを感じる生徒は少なくなかった。だが取組を継続する中で、これまで以上に課題解決後に既習との関連を統合的に捉え、さらに発展的に考えようとする生徒が多く見られるようになった。数学は絶えず批判的・創造的に思考しながら築かれる学問であり、数学における知識の構築には内容以上に思考が重要となる。今次研究１年次における最も大きな成果は、取組を通してこれまで以上に数学的な見方・考え方を意識的に働かせ、課題解決のための方略がより洗練されていく姿が見られたことである。他方、本実践は取組を初めて日が浅く、紹介した実践例も「数と式」領域に限定される。したがって今後の課題としては、他領域においても工夫しながら本実践を進めることで、より汎用性のある手立てを見いだすことにある。

## Ⅴ　引用文献・参考文献

〔引用文献〕

- 中原忠男（1995）『算数・数学教育における構成的アプローチの研究』聖文社、51
- 黒﨑東洋郎（2019）『数学的な見方を働かせたCUN課題発見・解決へのアプローチ－創造的数学力を育む真正の学び』、「岡山理科大学紀要」vol 55、119-127
- 樋口直宏（2013）『批判的思考指導の理論と実践－アメリカにおける思考技能指導の方法と日本の総合的な学習への適用』学文社、311

〔参考文献〕

- Brown, S. I. & Walter, M. I.（1983）『いかにして問題をつくるか－問題設定の技術』東洋館出版社
- 加固希支男（2019）『発想の源を問う－数学的な見方・考え方を言語化させ、顕在化させる』東洋館出版社
- 西岡加名恵、石井英真（2019）『教科の「深い学び」を実現するパフォーマンス評価－「見方・考え方」をどう育てるか』日本標準