



仲間と考えを磨き合い、真実を探究する学び

数学科

杉本 泰範 ・ 岩本 和馬

I 教科研究内容

1 数学科における「自律」と「共栄」に向かう学び

今次研究では、1つの問題から課題を見だし、様々な試行錯誤を経て解決へと至る過程において、生徒自身が自ら課題を見だし、解決に向かう計画を考えて実行し、時にその過程を振り返って成果や課題を確認しながら解決へ向かったり、結果を振り返って解決へつながった、あるいはつながらなかった理由を考えたりすることを重視してきた。それは、生徒が生涯にわたって未知の問題に対してたくましく向き合っていくようになることを願ったからである。

そこで、「自律」に向かう視点を、試行錯誤を通して解決への見通しをもち、個人による思考や他者との話し合いを通して解決に向かう計画を立てたり、そのために必要な資源（既習内容、表やグラフなどの思考ツール、数学的な見方・考え方など）を選択したりして、解決に迫っていくこととした。また「共栄」に向かう視点を、自他の解決過程や結果を話し合ったり発表したりして共有することを通して、互いに異なる視点の解決方法などに気付いて考えが深まったり、互いの解決結果が集まって新たな発見を生み出したりすることとした。数学科において、個人の思考は非常に重要なものである。個の学びを保証しながらも、他者の存在が多面的・多角的な思考を促すことで、自分の考えをより洗練させたり、新たな考えを得たりして、より深い理解にたどり着くことになる。互いに挙げた方法のよさや、活用の仕方など、次の学びに生きる「知の獲得」へとつながる。そして数学的に考え、数学を活用して解決しようとする意欲や、生涯にわたって主体的に自己を更新し続けようとする態度につながると思う。

2年次までの研究では、多様な解決の過程や結果を生む問題やそれを批判的に捉え直す場を生み出す問題設定の工夫をしたうえで、生徒が思考の変遷の可視化や自己評価・相互評価の内容を基に解決に向かったり、内容をさらに発展的・統合的に深めていったりする授業実践を積み重ねてきた。それにより、生徒は一層自らの学びの過程に着目し、自ら他者を求めながらそれまでの過程を振り返り、自分の考えを深めたり修正を加えたりする姿が多く見られるなど、大きな成果が得られた。一方で、生徒自身がそのような学びの価値を実感して自ら過去の学びを活用し洗練していくようになること、適切な自己評価・相互評価のあり方、他者を求める際の目的の明確化などの課題もあった。最終年次ではそれらの課題を踏まえてこれまでの手立てを整理し、生徒がより明確な意図をもって「自律」と「共栄」に向かう学びを展開することを目指したい。

2 数学科における「自律」と「共栄」に向かう学びの手立てと期待される生徒の姿

1年次は「自律」と「共栄」に向かう学びの手立てを以下のように考えた。

【1年次の手立て】

- 「自律」に向かう視点の手立て
多様な解決の過程や結果を生む問題設定の工夫
- 「自律」と「共栄」に向かう学びの手立て
 - ① 解決の見通しや思考の過程、結果を、可視化により共有化する授業展開
 - ② 解決の過程や解決したことを振り返り、一般化したり発展したりしていく授業展開

そして、導入時に提示する問題の設定と、授業展開の工夫により、図や表、式、グラフなどの思考ツールや教具を選択したり、他者と多様な解決の過程や結果を共有し合ったりしながら解決に向かい、新たな知の獲得と次の学びへの意欲を生むとした。

2年次は授業展開のどの場面にどのような手立てを講じることで「自律」と「共栄」に向かう学びがより深まるかに焦点をあて、以下のように「省察」の機能を活用した授業の構築を目指した。

【2年次の手立て】

- (1) 解決の見通しや解決の過程、結果を批判的に捉え直す場を生み出す問題設定
- (2) 思考の過程や解決の結果の変遷の可視化
- (3) 解決の過程や自己解決した内容の自己評価・相互評価

生徒一人一人が個に没頭する場面を大切にしながらも、「省察」の機能を活用することで自ら他者に働きかけ、自分自身の思考を広げたり、深めたりする姿が見られた。本時の目標に関わる知だけでなく、学びの過程に関わる知の獲得につながったといえる。

最終年次は、「省察」の機能を活用することで得られる「知」を明確化することでこれまでの手立てを見直し、以下のような手立てによって「自律」と「共栄」に向かう学びの実践を重ねていくこととした。

【最終年次の手立て】

- (1) 解決の見通しや解決の過程、結果を批判的に捉え直す場を生み出す問題設定
- (2) 思考の方法や解決の結果の変遷の可視化
- (3) 解決の過程や自己解決した内容の自己評価・相互評価を促す中間チェック
- (4) 「自己の思いや考え」に価値を見だし、それらを生かすためのワークシートの活用

手立て(1) 解決の見通しや解決の過程、結果を批判的に捉え直す場を生み出す問題設定

数学科の学習で扱う問題は、明確な答えがあるもの、確実に求められるものを扱うことが多い。与えられた条件が整えられた問題では、学びの見通しをもつことはできても解決の過程から得られる学びの本質に気付くのは難しい。

そこで、問題の設定に次のような工夫を加え、解決の過程において、「そもそもこの問題は解けるのか」「どのデータを使えばよいか」「他に何がわかれば解けるか」「他の考え方もあるのではないか」といった新たな問いが生まれることをねらう。

- 条件を不足して提示する
- 条件を過剰にして提示する
- 条件を段階的に付加する
- 条件を変更する

上記のような条件設定から「図に表すとよいのではないか」「表や式は使えるだろうか」「使える性質は何か」「規則性があるのではないか」と解決の見通しをもちながら解決の方法などを選択し、試行錯誤を通して解決に向かっていく。解決の方法に多様性があるからこそ、他者との関わりに必然性が生まれ、互いの考えを対比させて捉え直し、共通点や相違点を見いだしながら問題の本質に迫っていくことができる。また、解決した結果の妥当性を問うことで、「なぜそうなるのか」「本当に正しいのか」「いつでもいえるのか」「反例はないか」と批判的思考を促し、自ら学びの過程を俯瞰し、他者との関わりを求めながら自覚していくことにつながる。得られた結果を再び見つめ直すことで、学びの過程で用いた方法や考え方、原理・法則の価値を見だし、次の学びに積極的に活用していくことになるのである。

手立て(2) 思考の方法や解決の結果の変遷の可視化

個人思考の時間を十分確保し、個に没頭することを積極的に認めることは、一人一人が自分なりの考えを持ち、互いを支え合ったり、活かし合ったりするための前提となると考える。しかし、単に個人思考の場を設けるだけでは、個に没頭するあまり、自らの考えに広がりや深まりが生まれなかったり、解決に至らず

行き詰ったりしてしまうことがある。

そこで、おのおのが考えた解決の方法を板書に位置付けたり、選択した方法をネームプレートで示したりして可視化する。それによって互いの考えを知ることや、行き詰ったときや他の考え方はないかを考えていくときの道しるべとなり、生徒はそこで知り得た情報を基にして解決へ向かったり、可視化された内容を基に同じ考えや異なる考えの生徒を求めたりしていくことになる。また、新たな解を導いていくことを積極的に認め、解決に向けた思考の方法だけでなく、個人思考で導き出された個々の考えや得られた結果を可視化することで自らの学びの過程を再認識することにつながる。さらに、「どう考えて導かれたのか」「自分の求め方との共通点や相違点は何か」を問い、自他の学びの過程を俯瞰するよう促していく。その変容を板書に改めて可視化することで、(a)～(d)のような捉え方で学びの過程を比較・検討し、拡散的な思考から収束的な思考へと向かい、自らの学びの過程を自覚化していくことができる。

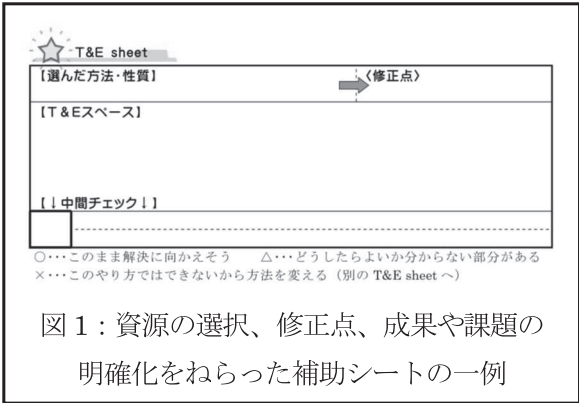
- (a) 並列的な捉え方・・・「それぞれの考え方に利点がある」
- (b) 序列的な捉え方・・・「どの考え方がよりよいか」
- (c) 統合的な捉え方・・・「これとこれは同じ考え方だ」
- (d) 構造的な捉え方・・・「この考え方はあの考え方と部分的に一致する」

このように、学びの過程を可視化することによって、おのおのの考え方と自分の考え方との結びつきが明確になり、学びの過程について得られた知を次の学びに積極的に生かそうとすることができるのである。

手立て(3) 解決の過程や自己解決した内容の自己評価・相互評価を促す中間チェック

2年次では、互いの課題解決へ向けた見通しや途中段階での考え、あるいは自己解決した内容について、他の生徒との交流を通して自己評価・相互評価を行う場の設定を手立ての1つとした。それによって、生徒が最初の見通しや解決の計画、資源の選択に対して成果や課題を自己あるいは他者を通して考えを深め、解決へ向かうことを目指した。しかし自己評価や相互評価後の他者との交流の目的がやや曖昧になったり、複数の自己評価・相互評価の場の設定が生徒の自然な思考を阻害してしまう場合があったりするなどの課題が見られた。そこで最終年次では補助シートの活用により、その課題の解決を図る。そして自他の複数の考えや既習の内容を結び付けて統合的に考えたり、それらを基にさらに発展的に考えたりする授業展開を目指す。

例えば右のような補助シートが考えられる。授業の導入で生徒は授業の導入で共有された問題に関する性質、解決のための方法や考えから必要な内容を選択し、補助シートに記入する。その後、補助シートを持ちながら同じ方法を選択した生徒を見つけて互いの考えを出し合ったり、全体で中間チェックを行ったりすることで自己評価・相互評価が促され、その段階での成果や課題を再認識しながら新たな考えや視点を得て、再びよりよい解決を目指して取り組むことになる。また、自他が考えた複数の補助シートを組み合わせたり、共通項を見いだしたりすることで新たな概念を導き、発見した性質などをさらに発展的に捉えようとしたりすることになる。それによって、生徒が互いの考えを活かし合い、よりよい解決につながったと実感することができる。このような学びの過程を経て、1つの概念を多面的・多角的に考察して考えが深まったり、自ら選択した方法がどのような場面で有効かなどの理



解が深まったりすることになり、知の獲得が図られる。そして、学びに関する自己調整を行いながら、粘り強く問題へ立ち向かっていくことができると考える。

手立て(4)

「自己の思いや考え」に価値を見だし、それらを生かすためのワークシートの活用

「自己の思いや考え」とは、問題解決の過程における様々な場面で「解決への見通し」「困り感(つまずき)」「感想」「振り返り」「考察」「まとめ」に関する自分の思いや考えであり、意識的に、あるいは無意識的に自己内対話を行いながら解決に向かっていく。そのような様々な思いや考えを意図的に表出することを目的としたワークシートの活用によって、生徒自身の中で考えが整理され、自己内対話が洗練されていく。また他者との交流を通して様々な「自己の思いや考え」に触れ、その結果「自己の思いや考え」が一層深まったり、新たな考えに気付いたりすることにつながる。それらの活動を継続することによって、生徒は問題解決の過程で「自己の思いや考え」を表出し、それらを振り返りながら解決へ向かうことに価値を見いだすようになり、それが、粘り強く問題に取り組む素地につながると考える。

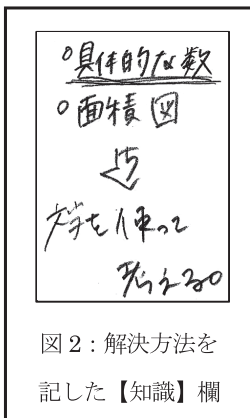


図2: 解決方法を記した【知識】欄

そこで自己内対話を促し、「自己の考えや思い」を整理するためのワークシートの工夫の例として、【知識】欄と【つぶやき】欄を設けた。【知識】欄は既習内容や考え方等を書くスペースである。【つぶやき】欄は「自己の思いや考え」を書くスペースである。実際の授業展開において、個人で思考する場面でそれぞれの欄についての事柄を書き留める。そうすることで、どのような資源を選択して解決方法考えたのかを適切に捉えるとともに、「何に着目した工夫をしたのか」「何につまづいているのか」「この方法のよいところはどのような点か」など、自己の考えを整理することにつながる。また、互いの【知識】欄や【つぶやき】欄の記述内容をたよりに、同じ、あるいは異なる「自己の思いや考え」をもつ仲間を求め、話し合いを進める。その際、他者からの新たな考えや方法に気付くことで、解決過程を見直し、必要に応じて資源を再選択しながら再び解決へ向かう(図2)。このように、【知識】欄だけでなく「自己の思いや考え」を記述した【つぶやき】欄を用いることで、解決過程における自他の考えが可視化され、目的をもった話し合いとなる。そして自他の考えや情報を得ながら解決方法を振り返り、課題解決のために何が有効だったのか再認識し、自分の考えをまとめていくことになる。そのような活動を繰り返し、よりよい解決方法を見いだしていく(図3)。

このようにワークシートを活用して「自己の思いや考え」を表出させることで、自他の解決に向けた取組に能動的に関わり合い、よりよい解決方法を模索しながら解決へ向かうことになる。そうした他者との関わりから互いの成長を支え合い、知の獲得につながる。そして生徒が学習課題の解決のための成果と課題を見つけようとしたり、解決に向かおうと粘り強く問題に取り組んだりする意欲を生み出していくと考える。

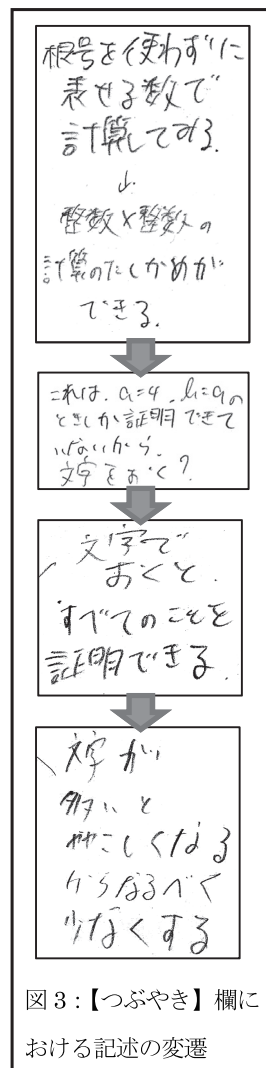


図3: 【つぶやき】欄における記述の変遷

II 実践例

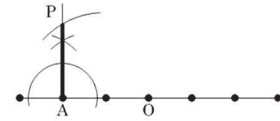
実践例 1	第3学年 「円」 円周角の定理の利用
	「自律」と「共栄」に向かう学びの手立て (1) 解決の見通しや解決の過程、結果を批判的に捉え直す場を生み出す問題設定 (3) 解決の過程や自己解決した内容の自己評価・相互評価を促す中間チェック

【題材の価値】

この作図方法を一般化した性質が成り立つ証明については、辺の長さを文字で表したうえで、既習事項である三平方の定理、円周角の定理を利用した相似な三角形の性質、方べきの定理など、いくつかのアプローチが可能である。しかし、この問題では与えられた1種類の作図方法を基に $\sqrt{35}$ の作図方法を考えることしか求められていない。自他の交流からいくつかの作図方法を考えたり、与えられた図から予想される性質を挙げたりして、点の数に着目して作図方法に関する本質的な性質に気づき、その証明を行うことで、性質の理解を深めたりさらに異なる作図方法を発見したりすることをねらった。

【問題】

$\sqrt{5}$ は次のような方法でも作図できます。この方法を用いて、 $\sqrt{35}$ の長さを作図しましょう。



【授業の実際】

問題提示後、生徒は「なぜこの方法で $\sqrt{5}$ になるのか」と疑問を述べ、黒板やワークシートを見ながら周りの生徒と交流し始めた。その後、図の中にOPを半径とする円の一部分が描かれていることに気づき、三平方の定理によって $\sqrt{5}$ になることや、点Aの位置に関して気付いたことなどの内容が全体で確認され、学習課題の提示に至った。学習課題の提示後、生徒は解決に向かえそうな方法をいくつかあげ、配付された補助シートに方法を記入した上で $\sqrt{35}$ の作図を考え始めた。

取りかかった直後、補助シートの内容をもとに同じ方法を選んだ仲間を探して考え始めたが、その段階では三平方の定理を用いて数を試行錯誤して当てはめる姿が多く見られた。そして中間チェックの内容を共有した後、それらの内容を基に「点Aの左側の点と、右側の点の数をかけたものが根号の中の数になるのではないか」と批判的に捉え、問題文には示されていない一般化された性質につながる新たな疑問をもつ生徒が現れ、それを教師側から全体に投げかけた。すると、



図4：同じ考えを選んだ生徒同士で試行錯誤する様子

中間チェックの内容などを基に文字を用いて三平方の定理によって証明を試みたり、自他の考えた図を参考にして円と相似な図形の考えを組み合わせる論理的に考えようとしたりする姿に変容し、再び同じ考えや図の表し方をする仲間を見つけて考える様子が見られた。そして三平方の定理による証明や、ターレスの定理や方べきの定理などの既習事項を用いて証明し、そこから演繹的に $\sqrt{35}$ の他の作図方法を導いた。生徒の自己評価・相互評価を促す中間チェックによって、最初に立てた解決の見通しや計画に互いの考えを活かし合って修正を加え、それぞれ選んだ方法で解決するためにどのような考えや視点が有効だったかを知り、「知の獲得」につながったと考える。また、自他の考えによってよりよい解決へつながったという実感が得られ、より本質的な性質を探ろうとする意欲へ結びついたと考える。

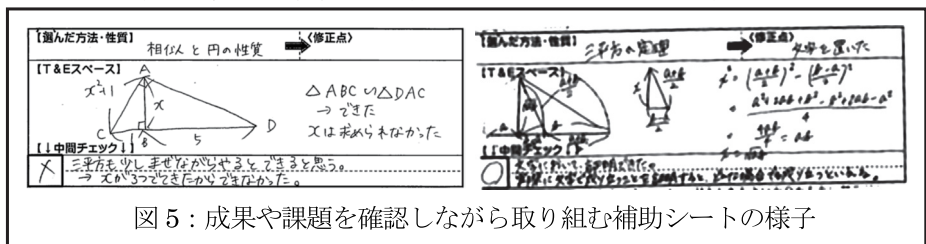


図5：成果や課題を確認しながら取り組む補助シートの様子

実践例2 「自律」と「共栄」に向かう学びの手立て

(4) 「自己の思いや考え」に価値を見だし、それらを生かすためのワークシートの活用

【題材の価値】

連続する2つの整数の平方の差の具体例からいくつかの規則性を生徒自ら見だし、それらがいつでも成り立つかどうかを演繹的に確かめる題材である。ここでは、文字を用いて式に表すだけでなく、互いが見いだした性質を説明するためにどのように式を変形するとよいか考

【問題】

$2^2 - 1^2$ 連続する2つの整数の大きい数の2乗から小さい数の2乗の差にはどのようなことがいえるだろうか。
 $3^2 - 2^2$
 $4^2 - 3^2$

えることになる。そして見いだしたいいくつかの性質を表した式が、変形していくと同一の式になることに気づき、文字式を利用することのよさや式に対する見方の深まりにつなげることをねらった。

【授業の実際】

導入時における計算結果についての生徒の予想は、「奇数」「2ずつ増える」「2数の和」というものであった。それらの予想が大きい数でも成り立つかどうかを確かめ、学習課題の提示に至った。学習課題の提示後、生徒は解決のためには文字を使う必要があると考えた。そこで、教師から何をどのように文字で置くのか問い返した後、生徒はそれらを【知識】欄や【つぶやき】欄

に書き留め、個人思考を始めた。その際、「どの部分を文字にして式に表せばよいだろうか」「式に表すことはできたが、どのような式変形をしたらよいだろうか」「自分は2種類

文字をおくとしてもどを文字にする？

図6：解決方法に関する疑問点の例

「 $2n+1$ 」と
 「 $n+(n+1)$ 」と
 分解するのは思いつかなかった

図7：「知の獲得」につながるつぶやきの例

種類の文字を用いて証明しようとしたがどうやらよいだろうか」などと、困っていることや考えていること、疑問点などを【つぶやき】欄に記述しながら思考を進める姿が見られた。図6はその際に、【つぶやき】に書かれた疑問点の一例である。

その後、「奇数」や「2ずつ増える」といった性質に関する証明は多くの生徒が解決できたが、「2数の和」になるという性質については、どのよう

に式に表せばよいか見いだせない様子であった。そこで、ワークシートを見せ合いながら自由に話し合うよう教師側から促すと、それぞれの生徒が自分の【つぶやき】欄をたよりに同じ考えや悩みを有している生徒を求め、「連続する整数だから最初の文字に1を加えればよい」「連続する整数の和という結論と対応するように式を変形すればよい」「2種類の文字では2種類の式を使って最後に代入すればよいのではないか」などと意見交流を行い始めた。そして意見交流で得た考えを基に、再びよりよい解決方法を考える姿が見られた。また授業の終末場面でそれらを共有した後、黒板上に記した証明からそれらの式を変形



図8：【つぶやき】欄の記述を参考に他者と交流する様子

すると同一の式になることにも気づくことができた。【つぶやき】欄の活用によって、自己の有する知識だけでなく、「自己の思いや考え」を基に成果や課題を常に振り返り、修正を加えながら解決へ向かうことが有効であることを知り、「知の獲得」に至った様子が伺える。そして、1つの具体例を様々な角度から捉えたり、条件を変えて新たな性質を見いだそうとしたりする意欲につながったと考える。

【Math Master】
 1つの式からいろんなことがわかって、証明が面白かった。でも同じ結論に結ばれたとしても、いくつかのやり方がある、すごいと思った。2数が連続した数だったけれども、その差が2や3だった時、どんな結論になるのかやってみようと思った。また、ちょっといろんな知識を使っていると思った。

図9：他者の視点が考えを深めることにつながった記述

Ⅲ 今次研究で見えてきたこと

数学科は教科の特性から考えて、提示する題材や課題の質がよいほど、生徒は「自分で考えたい」「もっと考える時間がほしい」と個人思考を求めていく傾向が強い。また、不得意な生徒にとっては、「わからない」ことを表出できず、見通しがもてないまま他者の考えに依存することで終わっていくこともある。

今次研究において、生徒一人一人が学びの見通しをもったり、解決に向けた計画を立てたりするために必要な手立てを構築できたことは大変意義深いと考える。問題の設定の工夫や思考過程の可視化により、問題の答えや解決した結果だけにとらわれず、解決に必要な方法に着目し、どのような方法が有効かを学び続ける姿が見られた。また、手立てを構築する上で、他者との関わりを自ら求めていくための工夫を重視したことで、教科としての要となる個人思考の場面を十分確保しながらも、個と個の必然性のある結びつきが生まれた。席を立てて自分から他者を求める姿や他者の考えをもとに自己の学びを見つめ直す姿が見られ、個と集団を往還しながら学びを推し進め、互いの成長につなげることができたといえる。

また、1単位時間で「省察」の機能を活用し、自らの学びを俯瞰することができるように促したことで、獲得する「知」の両側面の価値を実感することにつながった。長期的なスパンで学びの過程で得られた知を積み重ね、学び直しながら次の学びに向かっていく姿から、より教科の本質に迫ることができたと考えられる。

今日、学校教育の中で、教科の果たすべき役割が何なのか問われている。数学的活動を通して、生徒自ら見通しをもって他者と関わりながら解決に向かうことや学びの過程で見えてきたことを共有すること、獲得した「知」を次の学びに活かしていくことを目指して研究を進めてきた。その成果を教師が見取るだけでなく、生徒自身が自分の成長にどうつながったのか、さらにどのような学びが実現できればさらなる成長につながるのかを明確にできるようにしていくことで教科の果たすべき役割が見えてくると考える。今後も自己の姿を的確に捉え、自他の理想の姿と照らし合わせながら学びを推し進め、個と集団それぞれの高まりを実現できる教科の在り方を模索していきたい。

Ⅳ 参考文献

- ・片桐重男『数学的な考え方・態度とその指導 1 名著復刻 数学的な考え方の具体化』明治図書、2017年
- ・亀岡正睦『「ふきだし法」による指導と評価の一体化に関する研究』日本数学教育学会誌、第78巻、第10号、pp.25-30、1996年
- ・古藤怜『算数科多様な考えの生かし方まとめ方』東洋館出版社、1990年
- ・佐々木寿洋『子どもの「思い」を表出させ、それを生かした授業実践—小数の除法の授業における考察—』日本数学教育学会誌、第84巻、第4号、pp.2-10、2001年
- ・佐藤浩一『学習の支援と教育評価 理論と実践の協同』北大路書房、2013年
- ・澤井陽介『授業の見方「主体的・対話的で深い学び」の授業改善』東洋館出版社、2017年
- ・三宮真智子『メタ認知 学習力を支える高次認知機能』北大路書房、2008年
- ・自己調整学習研究会『自己調整学習 理論と実践の新たな展開へ』北大路書房、2012年
- ・相馬一彦、國宗進、二宮裕之『理論×実践で追究する！数学のよい授業』明治図書、2016年
- ・那須正裕『資質・能力と学びのメカニズム』東洋館出版社、2017年
- ・西村圭一『真の問題解決能力を育てる数学授業—資質・能力の育成を目指して—』明治図書、2016年
- ・Mason, J『Thinking Mathematically』Addison-Wesley Longman Limited、1985年