



数学のよさを実感し合いながら広がる無限の世界

# 数学科

長谷川 英和 ・ 杉本 泰範

## I はじめに

学習指導要領改訂に向けて、教育課程企画特別部会における論点整理では、「課題の発見・解決に向けた主体的・協働的な学び」、いわゆる「アクティブ・ラーニング」を中核とする指導改善が示されている。IEA国際数学・理科教育動向調査（TIMSS 2011）では、数学の勉強が楽しいと答えた日本の中学生の割合は国際平均を下回る。OECD生徒の学習到達度調査（PISA 2012）の結果によれば、数学的リテラシーはOECD諸国中2位であり、数学の学力の状況はトップレベルである。しかし、同調査では、数学に対する不安を感じている生徒は国際平均より高く、数学を有用と感じている生徒は国際平均より低い。「数学における興味・関心や楽しみ」においては、以前のPISA調査より数値が上昇しているものの、今調査に参加した65か国中60位であった。特に「数学で学ぶ内容に興味がある」という質問に関して肯定的な回答をした生徒は37.8%にとどまり、65か国中63位であった。このことから、知識・技能や思考力・判断力・表現力は十分であるが、学ぶ意欲や態度については課題が残されているといえる。

将来の変化を予測することが困難な時代を前にした子どもたちにとって、予測できない未来や答えのない問題に対応するために必要な資質・能力を身に付け、加速度的な社会の変化に対応できるようにすることが義務教育段階で求められている。「何を」、「どのように」学ぶか、つまり、学び方を学ぶことは学校教育の担うべき一側面ではないだろうか。

次期学習指導要領の方向性として、「数学を学習する楽しさや学習する意義の実感などについては更なる充実が求められる」としている。生徒一人一人が自らの意思で学び押し進めていくことがこれからの時代に求められる資質・能力であると捉えられる。

## II 教科研究内容

### 1 数学科における「自律」と「共栄」に向かう学び

数学科の授業は、一つの問題との出会いから課題を見だし、「何を使えばよいか」「どのように考えればよいか」と試行錯誤して解決に向かっていく。よって、数学科において、解決に向けての試行錯誤の時間は欠かせない。はじめはうまくいかないこともあるが、「こうするとうまくいかない」ということを学ぶことになり、徐々に焦点化していく。試行錯誤は、時に自分自身との内なる対話をしながら進めていくが、他者と解決の過程を共有することによって、自分自身の考えを顧みたり、自分では気付かなかった視点を得たりして、より明確な見通しをもつことができる。見通しをもつことで、「図を使うと結果がわかるかな」「表で示すと何通りあるかわかりそう」「式にすると規則性が表せそう」のように解決の方法を計画したり、教具などの資源を自分で選択したりして課題の解決に迫っていくことができる。このような、他者との試行錯誤を通じて課題解決に向かっていく学びの姿を「自律」に向かう視点と考える。

また、課題解決の過程において、互いの解決の過程や結果を共有することは、他者の考えが自分の考えを深めるだけでなく、自分の考えたことが他者に新たな視点を与えることになる。解決した結果から「どんなことがいえるのか」「何がわかったのか」を共有し合い、「共通することは何だろうか」「まとめると何がいえるだろうか」のように統合したり、「条件を変えたらどうだろうか」「視点を変えたら何がわかるだろうか」のように発展したりしていくことによって新たな課題を見いだしていくことにもつながる。他者との関わりがあったからこそ、新たな発見を生み出したり、新たな視点を見いだしたりしていくことができ、「あなたと考えたから次の課題を見つけられた」「今度はこれについて考えていきたい」という認識をもてる。このような認識をもつことが互いを活かし合い、互いの成長を支え合う学びの姿であり、「共栄」に向かう視点である。

数学科の目標は「数学的活動の楽しさや数学のよさを実感し、それらを活用して考えたり判断したり

しようとする態度を育てる」ことである。生徒自身が「何を知っているか」を意識し、「何ができるか」、知っていることやできることを「どう使うか」を考える過程は、生徒の目的意識をもった主体的な活動としての数学的活動を充実することに寄与する。そして、自分の目標や理想とする姿を見だし、自己を更新し続けていくのである。

## 2 「自律」と「共栄」に向かう学びの手立て

数学科では、「自律」と「共栄」に向かう学びの手立てを以下のように考えた。

### (1) 「自律」に向かう視点の手立て

多様な解決の過程や結果を生む問題設定の工夫

### (2) 「自律」と「共栄」に向かう学びの手立て

① 解決の見通しや思考の過程、結果を、可視化により共有化する授業展開

② 解決の過程や解決したことを振り返り、一般化したり発展したりしていく授業展開

### (1) 「自律」に向かう視点の手立て

#### 多様な解決の過程や結果を生む問題設定の工夫 <<実践例1>><<実践例2>>

数学の学習は、問題解決の形でおこなわれる。問題を通じて生徒は、数学的な事象について考え、課題を見いだして探究していく。個人思考の時間は事象との内なる対話の時間である。「自分で考えたい」という意思や「まずはやってみよう」という気持ちを尊重することは学ぼうとする態度をはぐくむことになる。その際の問題がかなり限定された解決手段しかもたないものでは、生徒は自分が見いだした解決で満足してしまい、他者とともにさらに考えを深めようとする姿勢を生むことにはつながらない。具体物进行操作したり、図や表、式、グラフなどの思考ツールを選択したりしながら、自分では思いつかなかった考えや解決できなかったことを他者とともに確かめ合ったり、気づきを共有したりすることで、学びの見通しをもって解決に向かっていくのである。

そこで、多様なアプローチが可能な問題設定をおこなうことで、個人で考えたことがそこで完結せず、「他にどんな方法があるのだろうか」「この図形から取り組んでみたけど、他はどうなるだろうか」と他者とともに試行錯誤しながら解決に向かっていく。多様性があるからこそ、「他者に説明するにはどんな方法がよいか」「この考え方はあの人の考え方とつながっているのだろうか」という思考を促し、学ぶ価値を見いだしていき、学ぶ意欲を生み出していく。

多様な解決の過程や結果を生む問題とは、以下のようなものが考えられる。

- 図や表、式、グラフなどの思考ツールを用いて解決に向かうことができる問題
- 具体的な教具を用いて試行錯誤しながら解決に向かうことができる問題
- 多様な数学的な考え方で解決に向かうことができる問題
- 解決の結果に発展性がある問題

### (2) 「自律」と「共栄」に向かう学びの手立て

#### ① 解決の見通しや思考の過程、結果を、可視化により共有化する授業展開 <<実践例1>>

課題の解決に向かう際、初めから見通しをもつことは容易ではない。生徒は初めから解決の見通しをもつのではなく、「失敗してもいいからまずやってみよう」との意思をもち、思考し始める。そして、「これならうまくいきそう」「この方法なら使えるかもしれない」「これだとうまくいかなかった」など試行錯誤を重ねて、徐々に解決の見通しをもつことができる。しかし、一人では見通しをもてないことや、見通しをもつことはできても解決の途中でつまずくこともある。その時に、必要なのは他者からの新たな視点である。そこで、解決に向かっていくための見通しをもつ段階や途中の段階、おのおのが結果を

導いた段階でそれぞれの考えを板書し、可視化することで共有化を図っていく授業展開を「自律」と「共栄」に向かう学びの手立てとする。

こうした可視化による互いの見通しや考えたことの共有化を図ることで、生徒は解決へ向けて、見直しをもちながら取り組み、解決方法を選択したり、見いだしたりしていく。また、解決方法を板書に位置付けることによって、生徒が自ら他者を求めることができる。解決の途中でつまづきを感じた生徒は「どうすればいいのか」「ここから先はどう考えたらよいのだろうか」と自ら他者を求め、解決の方法を再び計画し直して解決に向かっていくのである。【「自律」に向かう視点】

また、「共栄」に向かう視点としては、他者の思考の過程や結果を可視化することによって、生徒は自分の考えと比較していく。「表と図のここが同じだ」といった共通点や「できた式が違う」といった相違点に気付き、「同じ考えだった」と自分の考えに自信をもつことができたり、「なぜそうなるのか」「どう考えたのか」といった疑問から他者を求め、新たな発見に気付いたりしていくことになる。【「共栄」に向かう視点】

## ② 解決の過程や解決したことを振り返り、一般化したり発展したりしていく授業展開 <<実践例2>>

生徒は「この方法でよいのか」「これで合っているのか」のように、自分自身の学びを適宜振り返りながら課題の解決に向かっていく。自己の学びを振り返るには、他者の視点は欠かせない。他者が考えていることや解決したことを適宜振り返って自分自身の思考と結びつけることで、それまでに出示された考えが再認識、再評価され、学びの過程を修正していく。そして、より客観的に捉えたり、多面的・多角的に考えたりすることができるのである。また、互いの考えをもとに思考の方法やツールを再び選択したり、修正したりしながら知を獲得していくことができる。【「自律」に向かう視点】

また、解決の過程や解決したことを一般化することによって、互いの考えを補い合っていることに気付いたり、未解決なことが何かを明らかになったりする。おのおのでは一部の解決にしかならないことも互いの情報を集めて「共通することは何か」「他にどんなことがいえるか」と促していくことでより深い理解につながる。このように、互いの関わりが共に活かし合う姿につながり、課題の追及や新たな課題に向かってより発展的に考察していくことができるのである。【「共栄」に向かう視点】

例えば、「立方体の展開図になるのはどれか」という問題を提示する。展開図の中には立方体にならないものも含んでおく。はじめ、生徒はポリドロンを使いながら立方体ができるものをそれぞれ確かめていく。生徒は「こんなにあるはずがない」「これ意外にもあるような気がする」とつぶやく。そこから立方体の展開図がいくつあるだろうかという学習課題を共有し、自分自身でつくりながら「次はこうしよう」と計画を縦ながら解決に向かう。グループ内で「これ同じだ」「これできないよ」といった他者との関わりを通じて見つけていく。【「自律」に向かう視点】その後、全体で結果を確認すると、11種類わかる。どうして11種類だといえるかと問うことで結果を振り返り、互いに見つけた展開図を整理し直し、見つけやすい方法を見いだしていく。互いに考えたことが統合され、互いを深め合う学びとなる。【「共栄」に向かう視点】

## Ⅲ 実践例

### <<実践例1>> 第2学年 「式の計算」 式の利用

(1) 多様な解決の過程や結果を生む問題設定の工夫

(2) - ① 解決の見通しや思考の過程、結果を、可視化により共有化する授業展開

#### 1 題材の価値とねらい

この題材は、事象に潜む規則性を、文字を使った式で表すことができること、文字を使った式で表す

ことで結果をわかりやすく表現できることが実感できるようにすることをねらいとしている。立式においては、複数の結果から帰納的に考える場合と規則性の意味から演繹的に考える場合がある。それぞれがつくった式を読み取ることで、規則性を一般化し、その意味を理解することができることをねらった。

**【問題】**

5 個の点があるとき、2 点を通る直線は、何本引けるか。

**2 「自律」と「共栄」に向かう学びの手立て**

「(1) 多様な解決の過程や結果を生む問題設定の工夫」を本時の手立てとした。はじめに、1 点、2 点のときに直線は何本引けるかを確認し、5 点ならどうか、そして、点の数を変えていくとどうなるかと思いを促すことで、生徒は「どんな規則性があるか」を学習課題として共有化する。課題の解決に向けて、図をかいたり、表に表したりと解決の方法を自ら選択し、試行錯誤しながら規則性について考えていく。帰納的に考えていきながら、規則性を表すために「式にしたい」と考えることにより、演繹的な考え方が見えてくる。多様なアプローチにより生徒は思考し、他者と意見交換しながら解決に向かうのである。

また、「(2)－① 解決の見通しや思考の過程、結果を、可視化により共有化する授業展開」を手立てとした。課題解決に向かう際、どんな方法がよいか見通しを持つためには、試行錯誤することが必要である。生徒は、あらかじめ用意してあるホワイトボードやマグネット、方眼紙などの道具を自分の判断で選んで用いたり、ワークシートに向かって思考を働かせたりしながら解決の方法を考えていく。そこで、全体で解決の方法を確認し、各自が選択する方法を黒板に示し、個人の見通しを把握できるようにする。そうすることで、生徒は自分から他者を求め、ともに解決に向かっていく。目的を明確にして、道具を選択したり、解決の方法を計画したりして他者を求めて解決に向かったりしていく姿は「自律」に向かう学びの姿であるといえる。また、解決していく過程において、他者の考えを求めていくことで自分の考えを広げたり、自分の考えを伝えたりすることで他者に貢献することは「共栄」に向かう学びの姿であると考えた。

**3 授業の実際**

はじめに、「1 点を通る直線は何本引けるか」、「2 点を通る直線は何本引けるか」を確認し、問題提示を行った。生徒は少し考えて、点の並びによって引くことのできる直線の本数が異なることに気付いた。どんな場合があるかを聞いていくと、最大の本数が10本であると確認できた。では、「点が10個あったら?」「点が100個あったら?」と投げかけると、「規則性がありそうだ」という予想が生まれた。そこで、学習課題を「点の数と2点を通る直線の本数にはどんな規則性があるだろうか」とし、共有化を図った。どんな方法があるかを問うと、あまり見通しがもてておらず「とりあえずやってみたい」とのことだったので、考える時間をとった。その際、生徒は、教具として用意してあったホワイトボードやマグネット、グラフ用紙などを自分で選択してもっていき、考え始めた。個人で考えたり、自分から他者を求めて複数の仲間とグループをつかって考えたりしていった。数分して、「規則性を見つけるために、どんな方法がありそうか」と問うと、「式」、「表」、「図」が出された。方法の確認を可視化したことで、一人一人が解決に使うツールを選択し、見通しをもって課題解決に向かっていった(図1)。

解決の過程において「自分(たち)が考えたことが正しいか」、「他の人(たち)はどんな考えをしているのか」気になり、板書で誰が何を使って考えているかを確認して自分から席を立ち、他者を求めていく姿が見られた(図2)。【「自律」に向かう視点】

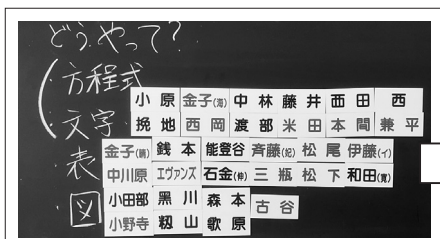


図1：解決の方法を可視化



図2：同じ解決方法を選んだ他者を求め、考えを交流する姿

「表」には、対応表のほか、総当たり表があった。「図」には、多角形のような図形を書いたものもあれば、樹形図のようなものを使った考え方もあり、興味深く他者の考えを聞いていた。全体で考えたことを交流していく中で、「図」や「表」と「式」をつなげていく考え方が出され、式の意味に注目して考えていった。表から帰納的に考え、 $(n^2 - n) \div 2$  や  $n(0.5n - 0.5)$  がつくられたが、計算すると同じ式になることに気づいた。また、他者がつくった図(図3)をもとに、 $\frac{n}{2} \times (n - 1)$  の式の説明をし、演繹的に式をとらえていくことができた。いずれの式も計算結果が同じになることから、規則性を文字式で表し、統一的に理解することで、式で表すよさを感じていった(図4)。それぞれが見いだしたことを他者とともに共有することにより、互いを高め合ったり、支え合ったりする姿がみられた。

【「共栄」に向かう視点】

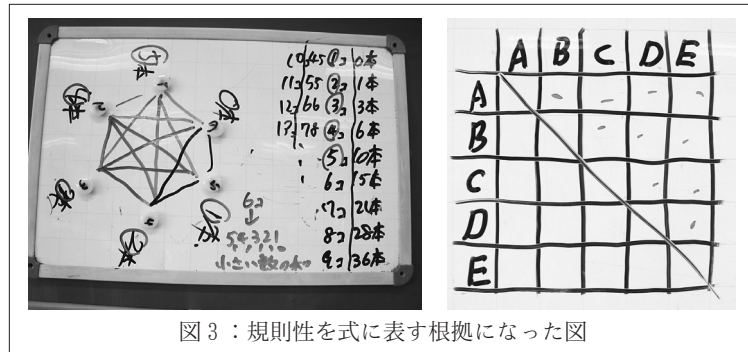


図3：規則性を式に表す根拠になった図

【自分の考え】  
表をつくってみる

図	.	—	△	▽	◇	☆	⬠
個数	1	2	3	4	5	6	7
本数	0	1	3	6	10	15	21

【他の考え】  
他の式はつながらなくていいから  
材料表かたいさの  
A B C D E  
A 0 0 0 0  
B 0 0 0 0  
C 0 0 0 0  
D 0 0 0 0  
E 0 0 0 0

① 1つの点に(n-1)本集まる  
② 1本は2点で成り立つので、重なりがある =  $\frac{n}{2}$

④  $4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 10$   
 $(n-1) + (n-2) + (n-3) + \dots + 1 + 0$

結局、全部同じ...? 2つに分かれる

図4：他者の考えを自分の考えや別の他者の考えと結びつけ、ワークシートに整理している

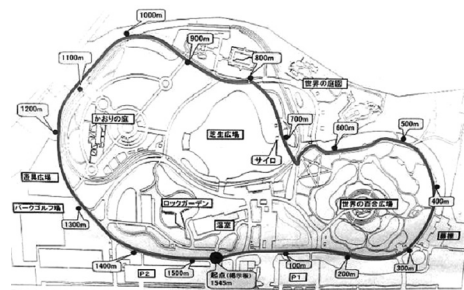
《実践例2》 第3学年 「式の計算」 式の利用

- (1) 多様な解決の過程や結果を生む問題設定の工夫
- (2)-② 解決の過程や解決したことを振り返り、一般化したり発展したりしていく授業展開

1 題材の価値とねらい

【問題】

たかし君は百合が原公園を1周するコースについて調べたところ、道幅はどこもほぼ変わらず約6m、中央線の長さが約1545mであることが分かりました。たかし君はこのことから、「道幅と中央線の長さをかければ面積になるのではないかと考えました。たかし君の考えは正しいでしょうか。



この題材は、身近な事象を数学的にとらえ、そこに見られる数学的な性質を、文字式を用いて証明することをねらいとしている。一般に日常に見られる数学的な事象には、既習事項を単純には当てはめられない複雑なものも多く、この題材も一般的な求積方法を当てはめて証明できないものである。そこで、複雑な事象を既習の求積方法を用いることができる図形に置き換え、それぞれの場合についての証明を行うことで、一般化された数学的な性質へと近づけることになる。

## 2 「自律」と「共栄」に向かう学びの手立て

「(1) 多様な解決の過程や結果を生む問題設定の工夫」を一つ目の手立てとした。上述のように本題材は過去に学んだ求積方法を当てはめられる図形にはなっていない。そこで課題解決のために、長方形のような直線型の図形や円などについて個々に証明することで、一つの結論に近づけるような問題を設定した。そこでは、生徒自身が自らの考えに基づいて既習事項が当てはめられそうな図形を記述し、証明を進めていくことになる。また、多様な図形についての証明が必要になることから、必然的に他者の考える図形や証明方法を求めることになる。

また、「(2)－② 解決の過程や解決したことを振り返り、一般化したり発展したりしていく授業展開」を二つ目の手立てとした。授業の各場面でそれぞれの生徒が互いの考えや悩みについて教師が投げかけを行ったり、生徒同士が相談し合ったりすることで、自分自身の考えを修正したり、より深い学びへとつなげていく展開を設定した。例えば導入場面で、教師が「面積を求められる図形はどんなものが考えられるか」と投げかけ、互いの意見の交流を図ることで、生徒は求積方法を当てはめられる図形かどうかを自らに問いかけ、見通しを持って図形を記述し、考え始める。その後も、他の生徒との関わりの中で、「本当にこの図形は面積が求められるか」「証明するにはどうしたらいいだろうか」などと考え、解決へ向かっていく。これを「自律」に向かう学びの視点と考えた。また解決の過程において、同じ考えや違う考えの生徒に自らの必要性に応じて関わり、「この図形は証明できたか」「他にどんな図形が考えられるか」などの交流を通してそれぞれの結果につながる。そしてそれらの結果から数学的な性質を帰納的に一般化していくだけでなく、その式の見方がさらに深まることになる。これを「自律」と「共栄」に向かう学びの視点と考えた。

## 3 授業の実際

導入部分で、教師が既習の求積方法が当てはめられそうな図形について生徒に問いかけると、長方形、正方形、円などが考えられるという意見が出された。生徒はこの意見を基にしてワークシートに自由に図形を書いて考え始めた。その後、それぞれの生徒が考えを進めていったが、具体的な数字で面積を求めようとしたり、図形をいくつかの部分に切り分けて組み合わせようとしたりする生徒が見られ、文字を用いて証明することに気づかない生徒が多く見られた。そこで教師側から「どんな場合でも成り立つことを言うためにはどうしたらいいか」と投げかけ、それに対する生徒の反応をもとに、証明には文字が必要になることの共有化を行った。考え方について共有化した後、同じような図形や異なる図形を書いている人を自ら見つけて互いに考えを交流する生徒が見られた(図1)。【「自律」に向かう視点】



図1：同じ図形の証明について交流する場面

考えを進めていく中で、「この図形の面積を文字式で表すには文字がもっと必要になるのではないか」「平行四辺形は面積を求めることはできるが、長さはどうやって出せばいいのか」「面積を文字で表すことまではできたが、結論とどうやって結びつけたらいいのか」などの疑問が聞かれるようになった。これらのことを、規定の4人グループを越えてさらに別のグループの生徒と交流し、解決へと向かっていく姿が見られた。さらに、考えた図形についての証明が終わった後も、他の生徒が考えた図形を自分のワークシートに書き写して証明し、「本当にそうなるか」を確かめ合うとする姿も見られた。(図2)

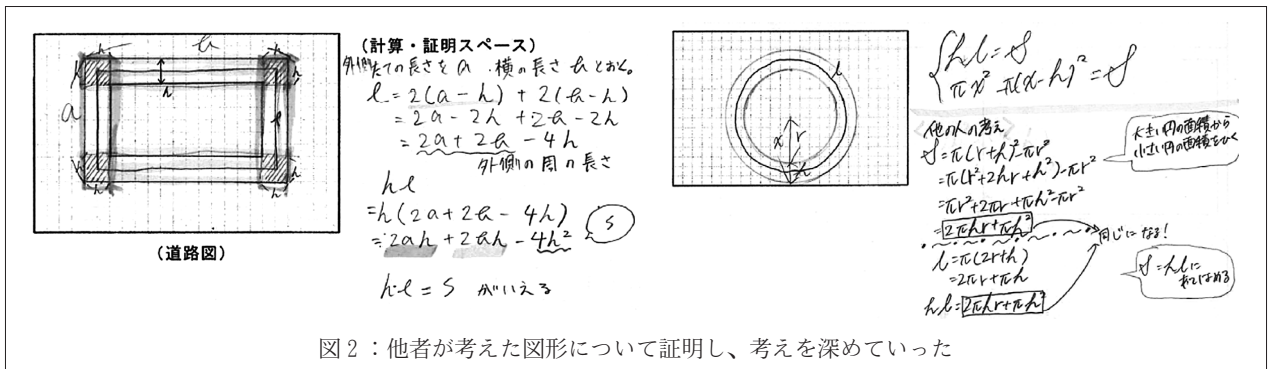


図2：他者が考えた図形について証明し、考えを深めていった

その後、数名の生徒が考えた図形についての証明を発表することを通して、どの図形についても同様の進め方で証明が行われることや、いくつかの図形が証明されたことで課題の解決に近づいたことを全体で確認することができた。また、解決に至らなかった図形についても紹介し、解決できるかどうかを全体で確認し、さらに考えを深める姿が見られた。【「共栄」に向かう視点】

#### IV 実践から見えてきたこと

「自律」に向かう視点について、問題設定の工夫により、生徒の多様な思考を促したことは解決の方法を計画したり、思考ツールを選択したりして課題の解決に意欲的に取り組む手立てとなったといえる。試行錯誤することを重視し、失敗をおそれず「とりあえずやってみる」という気持ちで課題解決に向かい、生徒が考えたことを自由に取り組んだり、適宜可視化によって他者の思考を確認できるようにしたりしたことで、自ら他者を求めながら自分の考えを振り返り、修正を加えたり、付加したりしてよりよい解決に向かった。これらの手立てにより、解決の仕方がわからない生徒や途中で立ち止まっている生徒も他者との関わりの中で、「わからない」「どうして？」という言葉をも素直に表現しながら粘り強く課題解決に向かうことができ、学ぶ意欲を生んだといえる。

また、解決の過程において、おのおのが考える時間を保障し、お互いが考えたことを交流しながら振り返っていくことで自分の考えを深めたり、広げたりすることができた。それぞれが考えたことが有機的につながることによって、数学的な事象についての理解を深め、新たな知をつくりあげる学びができたことから「共栄」に向かう手立てとなったといえる。

今後の課題としては、

- 個人での追究を続ける生徒にどのような働きかけが必要か。
- 個人・集団での追究の時間差にどのように対応していくか。
- 互いの成長を支え合っていることをより深く実感できるようにするにはどんな手立てがあるか。

の3点である。これらの課題を元に、今一度、個を育てる視点と集団を育てる視点の両方に機能する手立てとなっているかを評価・検証し、「自律」と「共栄」に向かう学びの手立ての再考に努めていきたい。

#### V 参考文献

- ・鹿毛雅治『子どもの姿に学ぶ教師 「学ぶ意欲」と教育的瞬間』教育出版、2007年
- ・中島健三『算数・数学教育と数学的な考え方 その進展のための考察』東洋館出版社、2015年
- ・牧田秀昭、秋田喜代美『教える空間から学び合う場へ 数学教師の授業づくり』東洋館出版社、2012年
- ・OECD教育研究革新センター『メタ認知の教育学 生きる力を育む創造的数学力』明石書店、2015年
- ・文部科学省『中学校学習指導要領解説 数学編』2008年